Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany

5. Übungsblatt zur Linearen Algebra II

Duale Abbildung, Gruppenoperationen

Aufgabe 1. (2P+2P)

Sei K ein Körper und V, W zwei beliebige K-Vektorräume (d.h. der Fall $\dim_K(V) = \infty$ oder $\dim_K(W) = \infty$ ist erlaubt). Sei weiter $\phi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung und

$$\phi^*\colon W^* \longrightarrow V^*, \quad l \longmapsto l \circ \phi$$

die zu $\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$ duale Abbildung $\phi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) ϕ ist genau dann surjektiv, wenn ϕ^* injektiv ist.

b) ϕ ist genau dann injektiv, wenn ϕ^* surjektiv ist.

Hinweis: Sie dürfen hier Basisergänzung und lineare Fortsetzung für Homomorphismen wie im endlichdimensionalen Fall benutzen. Wir werden dies im Verlauf der Vorlesung mit dem Lemma von Zorn für unendlich-dimensionale Vektorräume zeigen.

Aufgabe 2. (1P+2P+1P)

Betrachte die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Wir definieren eine wohldefinierte Abbildung $*\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} * z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

a) Zeigen Sie, dass $*\colon \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ eine Gruppenoperation definiert.

b) Zeigen Sie, dass die Operation $*$ transitiv ist. Zeigen Sie dafür, dass jedes Element $z \in \mathbb{H}$ durch eine geeignete Matrix $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf die imaginäre Einheit $i \in \mathbb{H}$ abgebildet werden kann.

c) Berechnen Sie den Stabilisator $\mathrm{Stab}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}(i)$.

Aufgabe 3. (1P+1P+2P)

a) Sei G eine Gruppe mit 21 Elementen die auf einer Menge X mit 11 Elementen operiert. Zeigen Sie, dass G mindestens einen Fixpunkt hat, d.h. es existiert ein Element $x \in X$, sodass $g \cdot x = x$ für alle $g \in G$ gilt.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 26. 05. 2022 um 14:00 Uhr in die Briefkästen im Foyer von Gebäude E.2.5 abgegeben werden. Es sind Gruppenabgaben zu zweit möglich. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe.

b) Sei G eine Gruppe die auf einer Menge X operiert und $x, y \in X$ in der gleichen Bahn. Zeigen Sie, dass die Fixgruppe $\mathrm{Stab}_G(x)$ isomorph zur Fixgruppe $\mathrm{Stab}_G(y)$ ist.

Hinweis: Wie hängen $Stab_G(x)$ und $Stab_G(g \cdot x)$ zusammen?

c) Wie viele Zerlegungen von $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ in drei disjunkte Teilmengen gibt es?

Hinweis: Lassen Sie die Permutationsgruppe S_6 auf der Menge aller Zerlegungen von X in drei disjunkte Teilmengen operieren und benutzen Sie die Bahnformel.

Aufgabe 4. ((Gruppe) 1P+1P+2P)

Sei K ein Körper und $n, r \in \mathbb{N}$ mit $r \leq n$ zwei natürliche Zahlen. Wir bezeichnen mit

$$Gr(r, K^n) := \{V \mid V \text{ Untervektorraum von } K^n \text{ mit } \dim(V) = r\}$$

die Menge der r-dimensionalen Untervektorräume von K^n. Für die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren $n \times n$ Matrizen definieren die Gruppenaktion

$$\cdot : \mathrm{GL}_n(K) \times Gr(r, K^n) \to Gr(r, K^n) \quad , \quad (A, V) \mapsto A \cdot V := \{Av \mid v \in V\}.$$

a) Bestimmen Sie den Stabilisator von $V := \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ und die Anzahl der Bahnen der Aktion. Hierbei bezeichnet $\{e_1, \ldots, e_n\}$ wie immer die Standardbasis.

b) Ist die Operation für $r \neq n$ treu? Begründen Sie wie immer Ihre Aussage.

c) Sei nun K ein Körper mit q Elementen. Zeigen Sie mithilfe der Bahnformel und Induktion, dass $\prod_{i=0}^{n-1}(q^n - q^i)$ die Ordnung von $\mathrm{GL}_n(K)$ ist.

Aufgabe 5. (2+2 Bonuspunkte)

Es sei $W = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\} \subset \mathbb{R}^3$ der Einheitswürfel mit Gruppe G^+ der orientierungserhaltenden Symmetrien, d.h.

$$G^+ = \mathrm{Sym}(W) = \{g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \mid g(W) = W\}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe G^+ 24 Elemente besitzt.

b) Eine 3-Markierung von W ist eine Teilmenge $S \subset W$ mit drei Elementen. Die Gruppen G und G^+ definieren Operationen auf der Menge der 3-Markierungen $\mathcal{M} = \{M \subset W \mid \#(M) = 3\}$ durch

$$G^+ \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \quad (g, M) \longmapsto g(M).$$

Bestimmen Sie die Bahnen der Aktion G^+ auf $\mathcal{M}$ und für jede Bahn einen Repräsentanten.

Hinweis: Die Gruppe G^+ besteht nur aus Drehungen.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Donnerstag den 26. 05. 2022 um 14:00 Uhr in die Briefkästen im Foyer von Gebäude E.2.5 abgegeben werden. Es sind Gruppenabgaben zu zweit möglich. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe.